PARAMETRİK MERKEZÎ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

İSTATİSTİĞE GİRİŞ
Dr. Emrah TALAŞ

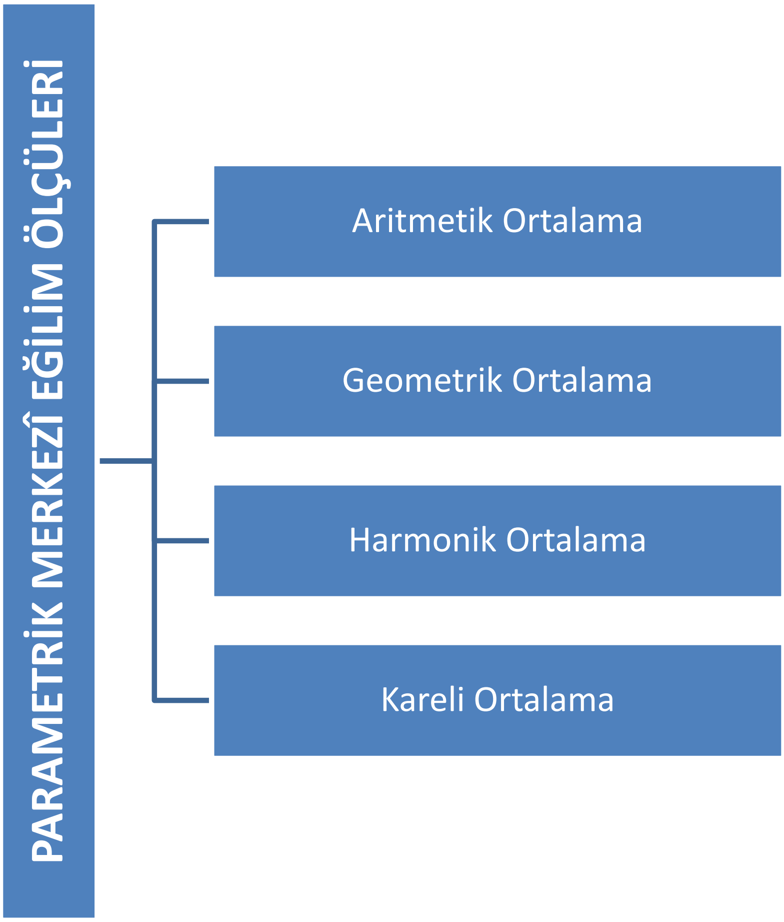
ÜNİTE
5

İÇİNDEKİLER

- Aritmetik Ortalama
- Geometrik Ortalama
- Harmonik Ortalama
- Kareli Ortalama

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Parametrik merkezî eğilim ölçülerini açıklayabilecek,
  - Basit, sınıflandırılmış ve gruplandırılmış serilerden parametrik merkezî eğilim ölçülerini hesaplayabilecek,
  - Parametrik merkezi eğilim ölçüleri arasındaki büyüklük ilişkisi hakkında bilgi sahibi olabileceksiniz.


PARAMETRİK MERKEZÎ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ
Aritmetik Ortalama
Geometrik Ortalama
Harmonik Ortalama
Kareli Ortalama

GİRİŞ

Serideki bütün birimlerden etkilenen merkezî eğilim ölçülerine parametrik merkezî eğilim ölçüleri denir.

Merkezî eğilim ölçüleri, istatistiğin özetleme görevini en ileri seviyede gören istatistik ölçülerdir. Şöyle ki, 1000 birimlik bir seri, mesela 80 sınıf yahut 15 grup hâlinde özetlenebildiği gibi serinin ortalaması alınmak suretiyle bu 1000 sayı bir tek birimle temsil edilebilmektedir.

Merkezî eğilim ölçüleri başlıca iki gruba ayrılır:

- Serinin bütün birimlerine tabi olan merkezî eğilim ölçüleri
- Serinin bütün birimlerine tabi olmayan merkezî eğilim ölçüleri

Serinin bütün birimlerine tabi olan merkezî eğilim ölçülerine *parametrik merkezî eğilim ölçüleri* de denilmektedir. Bu gruptaki merkezî eğilim ölçüleri serideki tek bir rakamın değişmesinden doğrudan doğruya etkilenirler. Bu sebeple parametrik merkezî eğilim ölçülerinin tamamı serideki aşırı uçların etkisinde kalırlar. Sınıf uçları belli olmayan gruplandırılmış serilerde sınıf değerleri hesaplanamayacağı için parametrik merkezî eğilim ölçülerinin hiçbiri hesaplanamaz. Bu gruptaki merkezî eğilim ölçüleri; aritmetik ortalama ($\bar{X}$), geometrik ortalama (G), harmonik ortalama (H) ve kareli ortalamadır (K).

İkinci grupta incelenecek merkezî eğilim ölçüleri ise serideki her bir değerden direkt olarak etkilenmeyebilir. Medyan, mod, kartiller ve ortalama kartil değerleri bu gruba giren merkezî eğilim ölçülerindendir. Bu ölçüler takip eden ünitede ele alınmıştır.

ARİTMETİK ORTALAMA ($\bar{x}$)

Bu grupta yer alan ortalamalar içinde en basit ve en yaygın olarak kullanılan ortalama aritmetik ortalamadır ve serideki tüm değerlerin toplamının toplam eleman sayısına bölünmesi ile hesaplanır. Frekans ve sınıflı serilerde aritmetik ortalama ise serinin toplam değerinin toplam frekansa (birim sayısına) bölünmesi ile bulunur. Ortalama seride değişkeni ifade eden harfin üzerine çizgi çizilerek gösterilir. [1] Aritmetik ortalama serideki bütün rakamlardan etkilenen bir ortalamadır. İstatistiki uygulamalarda en çok kullanılan merkezî eğilim ölçüsüdür. Basit bir seride aritmetik ortalama serideki birimlerin toplamının birim sayısına bölümüyle elde edilir. Yani,

Basit bir seride, serideki birimlerin toplamının birim sayısına bölünmesiyle aritmetik ortalama hesaplanır.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

şeklinde hesaplanır. Sınıflandırılmış ve gruplandırılmış serilerde ise aritmetik ortalama,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

formülüyle hesaplanır. Gruplandırılmış serilerde X değerleri sınıf orta noktalarını yani sınıf değerlerini gösterirler. X değerlerine ait tartılar varsa frekanslar yerine tartılar kullanılarak tartılı aritmetik ortalama hesaplanır. Tartılar t ile gösterilerek, tartılı aritmetik ortalama formülü,

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

şeklindedir. Tartılı aritmetik ortalama hesaplanırken kullanılan tartılar sınıflandırılmış ve gruplandırılmış serideki frekanslar gibi işlem görür [2].

Örnek

- 10, 12, 18 ve 20 sayılarından oluşan basit serinin aritmetik ortalamasını hesaplayalım.

Basit serilerde aritmetik ortalama hesaplanırken önce serideki değerler toplanır. Örnekte yer alan serideki değerlerin toplamı $\sum_{i=1}^{4} X_i = 60$'tır. Daha sonra bu toplam serideki değer sayısı olan 4'e bölünür. Böylece serinin aritmetik ortalaması

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{n} = \frac{60}{4} = 15$$

olarak elde edilir.

Aritmetik ortalama, aritmetik dizi şeklinde artış veya azalış gösteren serileri en iyi temsil eden parametrik merkezî eğilim ölçüsüdür.

Örnek

- Aşağıdaki sınıflandırılmış serinin aritmetik ortalamasını hesaplayalım.

X_i	f_i
4	1
5	2
7	4
9	3

Sınıflandırılmış serilerin aritmetik ortalaması hesaplanırken önce her bir X_i değişken değerinin tekrarlanma sayısını ifade eden f_i değeri ile çarparız. Çarpım sonuçları aşağıdaki gibidir:

X_i	f_i	f_iX_i
4	1	4
5	2	10
7	4	28
9	3	27

Daha sonra çarpım değerini toplarız. Çarpım değerleri toplamı, $\sum_{i=1}^{n} f_iX_i = 69$'dur. Bu toplam serideki toplam değer sayısı olan 10'a bölündüğünde serinin aritmetik ortalaması

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_iX_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{69}{10} = 6.9$$

olarak elde edilir.

Serideki birimlerin aritmetik ortalamadan sapmalarının toplamı sıfırdır.

Örnek

•Aşağıdaki sınıflandırılmış serinin aritmetik ortalamasını hesaplayalım. Derslerin haftalık kredi saatleri onların tartılarıdır.

Dersler	*Notu*	*Kredi Saati*	*tiXi*
Matematik	85	3	255
Genel İktisat	89	3	267
Temel Hukuk	55	2	110
Muhasebe	60	1	60
Yönetim	60	1	60

Tartılı aritmetik ortalama hesaplanırken önce her bir ders notu kendisine karşı gelen tartı ile çarpılır. Daha sonra çarpım değerlerini toplarız. Çarpım değerleri toplamı $\sum_{i=1}^{n} t_iX_i = 752$'dir. Bu toplam serideki toplam tartı miktarı olan 10'a bölündüğünde serinin aritmetik ortalaması,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_iX_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{752}{10} = 75.2$$

olarak elde edilir. Bahse konu olan öğrencinin ağırlıklı not ortalaması 75.2'dir.

Örnek

•Aşağıdaki gruplandırılmış serinin aritmetik ortalamasını hesaplayalım.

Gruplar	*Frekans*
2-4	2
5-7	13
8-10	4
11-13	1

Gruplandırılmış seriden herhangi bir parametrik merkezî eğilim ölçüsü elde edilebilmesi için gruplandırılmış serideki sınıf sınırları veya sınıf uçlarından sınıf değerleri elde edilir. Mesela birinci sınıfın sınıf değeri 2 ile 4 aralığının tam ortası, yani 3'tür. İkinci sınıfın sınıf değeri 6'dır. Üçüncü sınıfın sınıf değeri 9'dur. Dördüncü sınıfın sınıf değeri 12'dir. Sınıf değerleri X_i ile gösterilir. Bundan sonraki işlemler sınıflandırılmış seriden aritmetik ortalamanın hesaplanmasına benzer. Her bir sınıf değeri kendisine karşı gelen sınıf frekansı ile çarpılır.

Gruplar	X_i	f_i	$f_i x_i$
2-4	3	2	6
5-7	6	13	78
8-10	9	4	36
11-13	12	1	12

Sınıf değerleri ile frekanslarının çarpımları toplamı, $\sum_{i=1}^{n} f_i X_i = 132$'dir. Bu toplam frekansı ifade eden 20 değerine bölündüğünde gruplandırılmış serinin aritmetik ortalaması,

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{132}{20} = 6.6$$

olarak elde edilir.

Aritmetik Ortalamanın Özellikleri

- Aritmetik dizi şeklinde artış veya azalış gösteren serileri en iyi temsil eden parametrik merkezî eğilim ölçüsüdür. Basit bir sayıya belirli bir sayının katlarının ilave edilmesiyle elde edilen diziye *aritmetik dizi* denir. Mesela 5 sayısına sabit bir sayı olan 3 sayısının sürekli olarak ilave edilmesiyle *5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 36, …* serisi elde edilir. Bu seri aritmetik dizi şeklinde

Serideki birimlerin aritmetik ortalamadan sapmalarının kareleri toplamı minimumdur.

artışları gösteren bir seridir. Aritmetik ortalama, aritmetik diziye benzeyen serileri de en iyi temsil eden merkezî eğilim ölçüsüdür.

- Serideki birimlerin aritmetik ortalamadan sapmalarının toplamı sıfırdır [3].

X_i	$(X_i - \overline{X})$
10	-5
12	-3
18	3
20	5

Yukarıdaki basit serinin aritmetik ortalaması 15'tir. Serideki değerlerden serinin aritmetik ortalaması çıkarıldığında bazı farklar negatif, bazı farklar pozitif işaretli çıkmaktadır. Bu farklar toplandığında sıfır çıkmaktadır. $\Sigma(X_i - \overline{X}) = 0$

- Serideki birimlerin aritmetik ortalamadan sapmalarının kareleri toplamı minimumdur.

$$\Sigma(X_i - \overline{X})^2 = 68$$

X_i	$(X_i - \overline{X})$	$(X_i - \overline{X})^2$
10	-5	25
12	-3	9
18	3	9
20	5	25

Eşitlikteki $\overline{X}$ yerine A = 14 gibi bir başka değer koyduğumuzda bulacağımız $\Sigma(X_i - A)^2$ toplamı, $\Sigma(X_i - \overline{X})^2$ toplamından büyük çıkacaktır.

X_i	$(X_i - A)$	$(X_i - A)^2$
10	-4	16
12	-2	4
18	4	16
20	6	36

$\Sigma(X_i - \overline{X})^2 = 68$ değeri, $\Sigma(X_i - A)^2 =$ 72 değerinden küçüktür.

- Bir serinin aritmetik ortalaması serinin toplam frekansı ile çarpılırsa serideki rakamların toplamı elde edilir. Yani yukarıdaki basit seride $n(\overline{X}) = \Sigma X_i$ olmalıdır. 4(15) = 60'dır. Sınıflandırılmış ve gruplandırılmış serilerde ise $(\Sigma f)\overline{X} = \Sigma fX$ olur.

- Bir serideki rakamlar iki veya daha fazla serinin aynı hizadaki rakamlarının toplamına eşitse, bu serinin aritmetik ortalaması diğer serilerin aritmetik ortalamaları toplamına eşittir.

X	*A*	*B*
10	1	11
12	2	12
18	4	22
20	5	25

X serisinin aritmetik ortalaması $\overline{\mathrm{X}} = 15$’tir. A serisinin aritmetik ortalaması $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}} = 3$’tür. B serisi, X ve A serisinin aynı hizadaki değerlerinin toplamıdır. Bu sebeple $\overline{\mathrm{X}} + \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}} = 15 + 3 = 18 = \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{B}}$’dir.

- Bir serideki rakamların her birinin sabit bir sayı ile çarpılması hâlinde bulunacak serinin ortalaması önceki serinin ortalamasının söz konusu sabit sayı ile çarpımına eşittir.

X	*A*
10	20
12	24
18	36
20	40

X serisinin aritmetik ortalaması $\overline{\mathrm{X}} = 15$’tir. X serisindeki değerler 2 sayısı ile çarpılarak A serisindeki sayılar elde edilmiştir. A serisinin aritmetik ortalaması $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}} = 2(\overline{\mathrm{X}}) = 2(15) = 30$’dur.

- Serideki rakamlara belirli bir sabit sayının eklenmesi hâlinde bulunacak ortalama, önceki ortalamanın söz konusu sabit sayı ile toplamına eşittir.

X	*A*
10	12
12	14
18	20
20	22

X serisinin aritmetik ortalaması $\overline{\mathrm{X}} = 15$’tir. X serisindeki değerlere 2 sayısı eklenerek A serisindeki sayılar elde edilmiştir. A serisinin aritmetik ortalaması $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}} = 2 + (\overline{\mathrm{X}}) = 2 + 15 = 17$’dir.

GEOMETRİK ORTALAMA (G)

Geometrik ortalama da aritmetik ortalama gibi serinin bütün birimlerine tabi bir ortalama çeşididir. Bu ortalama, serideki n tane birimin çarpımının n’ inci

Geometrik ortalama, serideki “n” tane birimin çarpımının “n”inci dereceden kökü alınmak suretiyle hesaplanır.

dereceden kökü alınmak suretiyle hesaplanır. Seride sıfır veya negatif değer varsa geometrik ortalama hesaplanamaz. Geometrik ortalama, geometrik dizi şeklinde artış gösteren serileri en iyi temsil eden parametrik merkezî eğilim ölçüsüdür. Geometrik dizi bir sayının katlanarak değerler alması durumunda oluşan seridir. Mesela 2 değeri katlanarak değerler alırsa 2, 4, 8, 16, 32, … serisi elde edilir.

Gözlem sonuçları arasındaki oransal (nispi) farkların mutlak farklardan önemli olduğu durumlarda geometrik ortalamaya başvurulur. Diğer bir ifade ile, gözlem sonuçlarının her biri bir önceki gözlem sonucuna bağlı olarak değişiyorsa ve bu değişmenin hızı saptanmak istenirse geometrik ortalama sağlıklı sonuçlar verir.

Basit serilerde geometrik ortalama,

$$G = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . \; .... \; . X_n}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formül seride çok sayıda rakam varsa pek elverişli değildir. Eşitliğin her iki tarafının logaritması alındığında, logaritması alınmış geometrik ortalama,

$$\log G = \frac{1}{n}\left[\log X_1 + \log X_2 + ... + \log X_n\right]$$

formülü ile hesaplanır. logG elde edildikten sonra her iki tarafın anti logaritması alınarak geometrik ortalama hesaplanır. Sınıflandırılmış ve gruplandırılmış serilerde geometrik ortalama,

$$G = \sqrt[\Sigma f]{X_1^{f_1} . X_2^{f_2} . \; ..... \; . X_n^{f_n}}$$

formülüyle bulunur. Formül bu haliyle kullanılamaz. Her iki tarafın logaritması alındığında,

$$\log G = \frac{1}{\Sigma f_i}\left[f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + ... + f_n \log X_n\right]$$

olur. logG bulunduktan sonra her iki tarafın anti logaritması alınarak geometrik ortalama bulunur.

Örnek 1: Aşağıdaki basit serinin geometrik ortalamasını hesaplayalım. Bu seri daha önce aritmetik ortalamanın hesaplanışını göstermede kullanılmıştır.

X_i
10
12
18
20

Geometrik ortalamanın hesaplanabilmesi için önce serideki rakamların logaritması alınır. X serisindeki değerlerin logaritmaları, log10 = 1, log12 = 1.0792, log18 = 1.2553, log20 = 1.301'dur. Serideki n = 4 değerin logaritma değerlerinin toplamı, $\sum_{i=1}^{4} \log X_i = 4.6355$'tir. Bu değer logG formülünde yerine yazılırsa;

$$\log G = \frac{4.6355}{4} = 1.1589$$

olarak elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının anti logaritması alınırsa serinin geometrik ortalaması, G = 14.42 olarak elde edilir. Hatırlanacağı üzere aynı serinin aritmetik ortalaması 15'tir. Aynı seriden hem aritmetik ortalama hem de geometrik ortalama elde edilirse $G < \overline{X}$ olduğu gözlenecektir.

Örnek 2: Aşağıdaki sınıflandırılmış serinin geometrik ortalamasını hesaplayalım:

X_i	f_i
4	1
5	2
7	4
9	3

Sınıflandırılmış serilerin geometrik ortalaması hesaplanırken önce her bir X_i değişkenin logaritması alınır. Daha sonra logaritmalı değerleri tekrarlanma sayısını ifade eden f_i değerleri ile çarparız. Çarpım sonuçları aşağıdaki gibidir.

X_i	f_i	$\log X_i$	$f_i \log X_i$
4	1	0.6021	0.6021
5	2	0.6990	1.3980
7	4	0.8451	3.3804
9	3	0.9542	2.8626

Çarpım sonuçları toplamı, $\Sigma f_i \log X_i = 8.2431$'dir. Bu değeri logG formülünde yerine yazdığımızda,

$$\log G = \frac{\Sigma f_i \log X_i}{\Sigma f} = \frac{8.2431}{10} = 0.8243$$

olarak elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının anti logaritması alındığında sınıflandırılmış serinin geometrik ortalaması, G = 6.67 olarak elde edilir. Hatırlanacağı üzere aynı serinin aritmetik ortalaması 6.9'dır. İki parametrik merkezî eğilim ölçüsü arasındaki $G < \overline{X}$ büyüklük ilişkisi yine gözlenmiştir.[4]

Örnek 3: Aşağıdaki gruplandırılmış serinin aritmetik ortalamasını hesaplayalım.

Gruplar	f_i
2-4	2
5-7	13
8-10	4
11-13	1

Gruplandırılmış seriden herhangi bir parametrik merkezî eğilim ölçüsü elde edilebilmesi için gruplandırılmış serideki sınıf sınırları veya sınıf uçlarından sınıf değerleri elde edilir. Bundan sonraki işlemler sınıflandırılmış seriden geometrik ortalamanın hesaplanmasına benzer. Her bir sınıf değerinin logaritması alınır. Daha sonra bu logaritmik değerler kendisine karşı gelen sınıf frekansı ile çarpılır.[5]

Gruplar	f_i	X_i	$\log X_i$	$f_i \log X_i$
2-4	2	3	0.4771	0.9542
5-7	13	6	0.7782	10.1166
8-10	4	9	0.9542	3.8168
11-13	1	12	1.0792	1.0792

Çarpım sonuçları toplamı, $\Sigma f_i \log X_i = 15.9668$'dir. Bu değeri logG formülünde yerine yazdığımızda,

$$\log G = \frac{\Sigma f_i \log X_i}{\Sigma f} = \frac{15.9668}{20} = 0.7983$$

olarak elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının anti logaritması alındığında sınıflandırılmış serinin geometrik ortalaması, G = 6.28 olarak elde edilir. Hatırlanacağı üzere aynı serinin aritmetik ortalaması 6.6'dır. Gruplandırılmış seriden elde edilen iki parametrik merkezî eğilim ölçüsü arasında da $G < \overline{X}$ büyüklük ilişkisi gözlenmiştir.

HARMONİK ORTALAMA (H)

Harmonik ortalama, serideki birimlerin çarpmaya göre terslerinin aritmetik ortalamasının tersidir.

Harmonik ortalama serideki birimlerin çarpmaya göre terslerinin aritmetik ortalamasının tersidir. Seride sıfır veya negatif birim bulunması hâlinde harmonik ortalama kullanılmaz. Basit serilerde harmonik ortalama,

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

formülüyle hesaplanır. Sınıflandırılmış ve gruplandırılmış serilerde harmonik ortalama,

$$H = \frac{\Sigma f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{X_i}}$$

formülüyle hesaplanır.

Örnek 1: Aşağıdaki basit serinin harmonik ortalamasını hesaplayalım:

X_i
10
12
18
20

Harmonik ortalamanın hesaplanabilmesi için önce $1/X_i$ değerlerinin bulunması gerekir.

X_i	$1/X_i$
10	0,1000
12	0,0833
18	0,0556
20	0,0500

Daha sonra $1/X_i$ değerlerinin toplamı, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i} = 0.2889$ olarak elde edilir. Bu değer formülde yerine yazılırsa basit serinin harmonik ortalaması,

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{X_i}} = \frac{4}{0.2889} \cong 13.85$$

olarak elde edilir. Bu basit serinin aritmetik ortalaması 15 ve geometrik ortalaması 14.42 olarak hesaplanmıştır. Harmonik ortalama parametrik merkezî eğilim ölçülerinin en küçüğü olarak elde edilir. Şimdiye kadarki parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasında $H < G < \bar{X}$ şeklinde büyüklük ilişkisi vardır.[6]

Örnek 2: Aşağıdaki sınıflandırılmış serinin geometrik ortalamasını hesaplayalım:

X_i	f_i
4	1
5	2
7	4
9	3

Sınıflandırılmış serilerin geometrik ortalaması hesaplanırken önce f_i/X_i değerleri bulunur.

X_i	f_i	f_i/X_i
4	1	0,2500
5	2	0,4000
7	4	0,5714
9	3	0,3333

Daha sonra bu değerler toplanarak, $\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{X_i} = 1.5547$ değeri bulunur. Bu değer formülde yerine yazılırsa sınıflandırılmış serinin harmonik ortalaması,

$$H = \frac{\Sigma f}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{X_i}} = \frac{10}{1.5547} \cong 6.43$$

olarak elde edilir. Bu örneğe göre de parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasındaki $H < G < \bar{X}$ şeklinde büyüklük ilişkisi gözlenmektedir [7].

Örnek 3: Aşağıdaki gruplandırılmış serinin harmonik ortalamasını hesaplayalım:

Gruplar	f_i
2-4	2
5-7	13
8-10	4
11-13	1

Gruplandırılmış seriden herhangi bir parametrik merkezî eğilim ölçüsünün elde edilebilmesi için gruplandırılmış serideki sınıf sınırları veya sınıf uçlarından sınıf değerleri elde edilir. Bundan sonraki işlemler sınıflandırılmış seriden harmonik ortalamanın hesaplanmasına benzer. Her bir sınıfın frekansını ve değerini kullanarak f_i/X_i değerleri bulunur.

Gruplar	X_i	f_i	f_i/X_i
2-4	3	2	0,6667
5-7	6	13	2,1667
8-10	9	4	0,4444
11-13	12	1	0,0833

Daha sonra bu değerler toplanarak, $\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{X_i} = 3.3611$ değeri bulunur. Bu değer formülde yerine yazılırsa sınıflandırılmış serinin harmonik ortalaması,

$$H = \frac{\Sigma f}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{X_i}} = \frac{20}{3.3611} \cong 5.95$$

olarak elde edilir. Daha önce söz konusu gruplandırılmış serinin aritmetik ortalaması 6.6 ve geometrik ortalaması 6.28 olarak elde edilmiştir. Bu örneğe göre de parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasında $H < G < \overline{X}$ şeklinde büyüklük ilişkisi vardır.

KARELİ ORTALAMA (K)

Kareli ortalama, serideki birimlerin karelerinin aritmetik ortalamasının kareköküdür [8]. Basit serilerde kareli ortalama,

$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$$

formülüyle hesaplanır. Sınıflandırılmış ve gruplandırılmış serilerde kareli ortalama,

$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i^2}{\Sigma f_i}}$$

formülüyle hesaplanır.

Kareli ortalama, serideki birimlerin karelerinin aritmetik ortalamasının kareköküdür.

Örnek 1: Aşağıdaki basit serinin kareli ortalamasını hesaplayalım:

X_i
10
12
18
20

Basit serilerde kareli ortalama hesaplanırken önce serideki değerlerin kareleri hesaplanır.

X_i	***X^2***
10	100
12	144
18	324
20	400

Sonra kareli değerleri toplamı, $\sum_{i=1}^{4} X_i^2 = 968$ olarak elde edilir. Daha sonra kareli değerlerin toplamı serideki değer sayısı olan 4'e bölündüğünde elde edilen değerin karekökü alınarak kareli ortalama,

$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{968}{4}} = \sqrt{242} \cong 15.56$$

olarak elde edilir. Bu basit serinin aritmetik ortalaması 15, geometrik ortalaması 14.42 ve harmonik ortalaması 13.85 olarak hesaplanmıştır. Kareli ortalama parametrik merkezî eğilim ölçülerinin en büyüğü olarak elde edilir. Parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasında $H < G < \overline{X} < K$ şeklinde büyüklük ilişkisi vardır.[11]

Örnek 2: Aşağıdaki sınıflandırılmış serinin kareli ortalamasını hesaplayalım:

X_i	***f_i***
4	1
5	2
7	4
9	3

Sınıflandırılmış serilerin kareli ortalaması hesaplanırken önce X_i değerlerinin karesi hesaplanarak f_i değerleri ile çarpılır.

X_i	***f_i***	***X^2***	***fX^2***
4	1	16	16
5	2	25	50
7	4	49	196
9	3	81	243

Daha sonra f_iX_i çarpımları toplanarak, $\sum_{i=1}^{n} f_i X_i^2 = 505$ değeri elde edilir. Bu değer serideki toplam rakam sayısı olan 10'a bölünerek karekökü alınırsa sınıflandırılmış serinin kareli ortalaması,

$$K = \sqrt{\frac{\Sigma f_i X_i^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{505}{10}} = \sqrt{50.5} \cong 7.11$$

olarak elde edilir. Bu örnekte de parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasındaki büyüklük ilişkisi H < G < $\overline{X}$ < K şeklinde gözlenir [9].

Örnek 3: Aşağıdaki gruplandırılmış serinin kareli ortalamasını hesaplayalım:

Gruplar	***f_i***
2-4	2
5-7	13
8-10	4
11-13	1

Parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasında H < G < $\overline{X}$ < K şeklinde büyüklük ilişkisi vardır.

Gruplandırılmış seriden herhangi bir parametrik merkezî eğilim ölçüsü elde edilebilmesi için gruplandırılmış serideki sınıf sınırları veya sınıf uçlarından sınıf değerleri elde edilir. Bundan sonraki işlemler sınıflandırılmış seriden kareli ortalamanın hesaplanmasına benzer. Her bir sınıf değerinin karesi bulunur. Daha sonra bu kareli değerler kendisine karşı gelen sınıfın frekansı ile çarpılır [12].

Gruplar	***X_i***	***f_i***	***X^2***	***f_iX^2***
2-4	3	2	9	18
5-7	6	13	36	468
8-10	9	4	81	324
11-13	12	1	144	144

Daha sonra bu değerler toplanarak, $\sum_{i=1}^{n} f_i X_i^2 = 954$ değeri bulunur. Bu değer formülde yerine yazılırsa sınıflandırılmış serinin kareli ortalaması,

$$K = \sqrt{\frac{\Sigma f X^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{954}{20}} = \sqrt{47.7} \cong 6.91$$

olarak elde edilir. Daha önce söz konusu gruplandırılmış serinin aritmetik ortalaması 6.6, geometrik ortalaması 6.28 ve harmonik ortalaması 5.95 olarak elde edilmiştir. Bu gruplandırılmış seriden elde edilen parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasında H < G < $\overline{X}$ < K şeklinde büyüklük ilişkisi vardır [13].

Bireysel Etkinlik

- Parametrik merkezi eğilim ölçülerinin hesplanmasında serideki hangi birimler dikkate alınır?
- Sosyal etkinlik için biraraya gelenlerin yaşları 50, 55, 46, 40, 35, 60, 65, 45, 50, 55'dir. Yaşların aritmetik ortalamasını hesaplayınız.
- Yukarıdaki örnekte 3. kişinin yaşını kendiniz değiştirip tekrar yaşların aritmetik ortalmasını hesaplayınız.Her seferinde bir kişinin yaşını değiştirip aritmetik ortalama hesaplaması yaptığınızda değişimi gözlemleyiniz.

Özet

- Merkezî eğilim ölçüleri, istatistiğin özetleme görevini en ileri seviyede gören istatistik ölçülerdir.
- Merkezî eğilim ölçüleri başlıca iki gruba ayrılır:
- 1-) Serinin bütün birimlerine tabi olan merkezî eğilim ölçüleri
- 2-) Serinin bütün birimlerine tabi olmayan merkezî eğilim ölçüleri
- Birinci gruba giren merkezî eğilim ölçülerine parametrik merkezî eğilim ölçüleri de denilmektedir. Bu gruptaki merkezî eğilim ölçüleri serideki tek bir rakamın değişmesinden doğrudan doğruya etkilenirler. Bu sebeple parametrik merkezî eğilim ölçülerinin tamamı serideki aşırı uçların etkisinde kalırlar. Sınıf uçları belli olmayan gruplandırılmış serilerde sınıf değerleri hesaplanamayacağı için parametrik merkezî eğilim ölçülerinin hiçbiri hesaplanamaz.
- Bu gruptaki merkezî eğilim ölçüleri; aritmetik ortalama ($\bar{X}$), geometrik ortalama (G), harmonik ortalama (H) ve kareli ortalamadır (K).
- **ARİTMETİK ORTALAMA ($\bar{X}$)**
- Yukarıda da temas edildiği gibi, aritmetik ortalama serideki bütün rakamlardan etkilenen bir ortalamadır. İstatistiki uygulamalarda en çok kullanılan merkezî eğilim ölçüsüdür. Basit bir seride aritmetik ortalama serideki birimlerin toplamının birim sayısına bölümüyle elde edilir.
- **GEOMETRİK ORTALAMA (G)**
- Geometrik ortalama da aritmetik ortalama gibi serinin bütün birimlerine tabi bir ortalama çeşididir. Bu ortalama, serideki n tane birimin çarpımının n' inci dereceden kökü alınmak suretiyle hesaplanır. Seride sıfır veya negatif değer varsa geometrik ortalama hesaplanamaz. Geometrik ortalama, geometrik dizi şeklinde artış gösteren serileri en iyi temsil eden parametrik merkezî eğilim ölçüsüdür. Geometrik dizi bir sayının katlanarak değerler alması durumunda oluşan seridir. Gözlem sonuçları arasındaki oransal (nispi) farkların mutlak farklardan önemli olduğu durumlarda geometrik ortalamaya başvurulur.
- **HARMONİK ORTALAMA (H)**
- Harmonik ortalama serideki birimlerin çarpmaya göre terslerinin aritmetik ortalamasının tersidir. Seride sıfır veya negatif birim bulunması hâlinde harmonik ortalama kullanılmaz. Harmonik ortalama parametrik merkezî eğilim ölçülerinin en küçüğü olarak elde edilir.
- **KARELİ ORTALAMA (K)**
- Kareli ortalama, serideki birimlerin karelerinin aritmetik ortalamasının kareköküdür. Basit serilerde kareli ortalama hesaplanırken önce serideki değerlerin kareleri hesaplanır. Sonra kareli değerleri toplamı elde edilir. Daha sonra kareli değerlerin toplamı serideki değer sayısına bölündüğünde elde edilen değerin karekökü alınarak kareli ortalama elde edilir.
- Kareli ortalama parametrik merkezî eğilim ölçülerinin en büyüğü olarak elde edilir. Parametrik merkezî eğilim ölçüleri arasında $H < G < X < K$ şeklinde büyüklük ilişkisi vardır.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Bir kibrit fabrikasının ürettiği kibritlerden rastgele seçilen 10 paket kibritin içindeki kibrit çöpleri sayılmış ve sırasıyla 39, 43, 35, 46, 47, 38, 41, 40, 45 ve 36 olarak bulunmuştur. Buna göre bu kibrit fabrikasının ürettiği paketlerdeki çöplerin aritmetik ortalaması kaçtır?
   a) 39
   b) 40
   c) 41
   d) 42
   e) 43

2. Yanda verilen sınıflandırılmış serinin aritmetik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 5.8
   b) 6.4
   c) 6.8
   d) 7.1
   e) 7.3

X_i	f_i
3	1
5	4
7	2
9	3

3. Yanda verilen gruplandırılmış serinin aritmetik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 3
   b) 4
   c) 5
   d) 6
   e) 7

Gruplar	f_i
3-5	4
5-7	6
7-9	3
9-11	5

4. Yanda verilen sınıflandırılmış serinin aritmetik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 10.25
   b) 10.55
   c) 11.05
   d) 12.15
   e) 12.55

X_i	f_i
6	5
10	7
14	3
17	4

5. Dört ülkenin işsizlik oranları (%) şu şekildedir: 5, 8, 12, 20. Bu basit serinin geometrik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 8.82
   b) 9.89
   c) 10.45
   d) 11.34
   e) 12.76

6. Yukarıdaki sınıflandırılmış serinin geometrik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 4.98
   b) 5.25
   c) 5.68
   d) 6.07
   e) 6.46

X_i	f_i
3	1
5	4
7	2
9	3

7. Yanda sınıflandırılmış serinin geometrik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 13.76
   b) 13.10
   c) 12.85
   d) 11.45
   e) 10.31

X_i	f_i
6	5
10	7
14	3
17	4

8. Yanda gruplandırılmış serinin geometrik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 5.99
   b) 6.32
   c) 6.88
   d) 7.51
   e) 7.95

Gruplar	f_i
1-5	4
5-9	6
9-13	3

9. Bir fabrikada üretilen ilk 1000 üründe her bir ürün 3 dk'da üretilirken, ikinci 1000 üründe her bir ürün 5 dk'da üretilmektedir. Buna göre bu fabrikada ürün üretme hızının harmonik ortalaması kaçtır?
   a) 3.12
   b) 3.45
   c) 3.75
   d) 3.98
   e) 4.24

10. Yukarıdaki sınıflandırılmış serinin harmonik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 9.1
   b) 9.58
   c) 10.24
   d) 10.68
   e) 11.34

X_i	f_i
6	5
10	7
14	3
17	4

Cevap Anahtarı

1.c, 2.b, 3.e, 4.c, 5.b, 6.d, 7.e, 8.a, 9.c, 10.b

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Çakır, F. (2000). Sosyal Bilimlerde İstatistik. İstanbul: Alfa Yayıncılık.

[2] Başar, Alaaddin, Oktay, Erkan. (2018). Uygulamalı İstatistik-I: Kısa Teorik Bilgiler ve Çözülmüş Problemler (12. baskı). Erzurum: Kültür ve Eğitim Kitap ve Kırtasiye.

[3] Tekin, A. (2012). Temel İstatistik Dersleri. Konya: Eğitim Yayınevi.

[4] Büyüköztürk, Ş. (2018). Sosyal Bilimler için Veri Analizi El Kitabı (31. baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

[6] Gürsakal, N., Oğuzlar, A, Gürsakal, S. (2022). Betimsel İstatistik (10. Baskı). Bursa: Dora Yayıncılık.

[7] Hayran, M. (1996). Bilgisayar İstatistik ve Tıp. Ankara: Medikomat Basım Yayın.

[8] Köseoğlu M., Yamak, R. (2013). Uygulamalı İstatistik (4. baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.

[9] Newbold, P. (2009). Statistics for Business and Economics (7. baskı). İstanbul: Literatür Yayıncılık.

[10] Özsoy, O. (2010). İktisatçılar ve İşletmeciler için İstatistik (3. baskı). Ankara: Siyasal Kitabevi.

[11] Johnson, A. R., W. D. Wichern (1998). Applied Multivariate Statistical Analysis (4th Edition). London: Prentice-Hall.

[12] Yıldız, N. T. (2008). Uygulamalı İstatistik (3. baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık.

[13] Yılmaz, B. (2018). İstatistik (4. baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık.